Profesor : José Cutipa

PITAGORAS ACADEMIA

HABILIDAD LÓGICA MATEMÁTICA

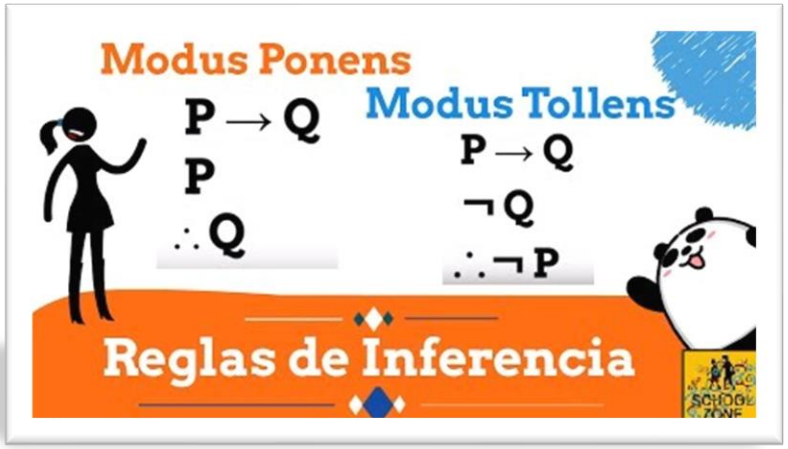
GRUPO PITÁGORAS

LÓGICA PROPOSICIONAL

¿Qué son?

Son equivalencias lógicas que nos permiten reducir esquemas moleculares complejos y expresarlos en forma más sencilla.

- Equivalencias Lógicas
- Enunciados
- Implicancias



LÓGICA PROPOSICIONAL

¿Las siguientes expresiones significarán lo mismo?

Si Ángel va al paseo, entonces el paseo será divertido.

Ángel no fue al paseo o el paseo estuvo divertido.

No es el caso que, Ángel vaya al paseo y el paseo no estuviera divertido.

El paseo será divertido si Ángel va al paseo.

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Dos o más esquemas lógicos serán equivalentes si al realizar sus respectivas tablas de verdad poseen la misma matriz principal

Para un mejor entendimiento veamos el siguiente ejemplo con una ley muy conocida

Ley de la condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$
$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

Las demostraciones de dichas leyes se hacen construyendo la tabla de verdad en cada caso

p	q	p	→	q	~p	∨	q	~q	→	~p
V	V	V	**V**	V	F	**V**	V	F	**V**	F
V	F	V	**F**	F	F	**F**	F	V	**F**	F
F	V	F	**V**	V	V	**V**	V	F	**V**	V
F	F	F	**V**	F	V	**V**	F	V	**V**	V

Se comprueba las equivalencias lógicas, ya que poseen la misma matriz principal.

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

1. Ley Involutiva o doble negación

$\sim(\sim p) \equiv p$

2. Ley de la idempotencia

$p \wedge p \equiv p$ $\quad$ $p \vee p \equiv p$

3. Ley conmutativa

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

$p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

$p \Delta q \equiv q \Delta p$

4. Ley asociativa

$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

5. Ley distributiva

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

6. Ley de D´Morgan

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

7. Ley de absorción

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

$p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

8. Ley de la condicional

$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

9. Ley de la bicondicional

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

10. Ley del complemento

$p \wedge \sim p \equiv F$ $\quad$ $p \vee \sim p \equiv V$

11. Ley de la identidad

$p \wedge V \equiv p$ $\quad$ $p \wedge F \equiv F$

$p \vee F \equiv p$ $\quad$ $p \vee V \equiv V$

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

EJEMPLO APLICATIVO

"Si Adán comió la manzana entonces Eva lo tentó", equivale a

A) Si Adán no comió la manzana, entonces Eva lo tentó
B) Adán no comió la manzana pero Eva lo tentó
C) O Eva lo tentó o Adán comió la manzana
D) Si Eva no lo tentó, Adán no comió la manzana
E) La serpiente tentó a Adán

SOLUCIÓN:

Simbolizando

Si Adán comió la manzana entonces Eva lo tentó

$p \longrightarrow q$

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Adán no comió la manzana o Eva lo tentó

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

Si Eva no lo tentó, Adán no comió la manzana

Ley de la Condicional

- $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

CLAVE D

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

PROBLEMA APLICATIVO

Si la proposición: "No es cierto que estudiemos y no aprobemos", es verdadera, entonces podemos afirmar:

A) Aprobamos o no estudiamos
B) Estudiamos y aprobamos
C) Estudiamos o no aprobamos
D) Aprobamos y no estudiamos
E) Siempre aprobamos

SOLUCIÓN:

Simbolizando

No es cierto que estudiemos y no aprobemos

$\sim \quad p \quad \wedge \sim \quad q$

$\sim (p \wedge \sim q)$ — Morgan

$\sim p \vee q$ — Conmutativa

$q \vee \sim p$

Aprobamos o no estudiamos

Leyes de Morgan

- $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
- $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

CLAVE A

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

PROBLEMA 1

Dada la proposición: "Si me despierto tarde, no llego a clases. Pero no llego a clases y no me despierto tarde". Esta proposición es equivalente a:

A) Me despierto tarde y no llego a clases
B) No me despierto tarde
C) Llego a clases o no me despierto tarde
D) No es cierto que, me despierto tarde o llego a clases
E) Me despierto tarde o no llego a clases

Ley de la Condicional

- $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

Leyes de absorción

- $[p \vee (p \wedge q)] \equiv p$
- $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$
- $[p \vee (\sim p \wedge q)] \equiv (p \vee q)$
- $[p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv (p \wedge q)$

SOLUCIÓN:

p : me despierto tarde
q : llego a clases

Formalizando:

$$(p \rightarrow \sim q) \wedge \sim q \wedge \sim p$$

Condicional

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge \sim q \wedge \sim p$$

absorción

$$\sim q \wedge \sim p$$

$$\equiv \sim (q \vee p)$$

$$\equiv \sim (p \vee q)$$

No es cierto que, me despierto tarde o llego a clases

CLAVE D

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

PROBLEMA 2

No es un buen deportista pero sus notas son excelentes. Es equivalente a:

A) No es cierto que, sea un buen deportista o sus notas no sean excelentes.
B) No es cierto que, sea un buen deportista o sus notas sean excelentes.
C) No es cierto que, no sea un buen deportista o sus notas no sean excelentes.
D) No es cierto que, no sea un buen deportista o sus notas sean excelentes.
E) Es un buen deportista o sus notas son excelentes

Leyes de Morgan

- $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
- $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

SOLUCIÓN:

Formalizando:

No es un buen deportista pero sus notas son excelentes.

$$\sim \quad p \quad \wedge \quad q$$

$$\sim p \quad \wedge \quad q$$

$$\sim \sim [\sim p \quad \wedge \quad q]$$

$$\sim \quad (p \quad \vee \sim q)$$

No es cierto que, sea un buen deportista o sus notas no sean excelentes.

CLAVE A

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

PROBLEMA 3

Antonia le dice a Martha: "Si cocinas o lavas toda la ropa, entonces no es cierto que; no vas a cocinar pero lavas toda la ropa". Sería lo mismo que le dijera:

I) No cocinas y lavas toda la ropa
II) Cocinas y lavas toda la ropa
III) Cocinas o no lavas toda la ropa
IV) Cocinas y no lavas toda la ropa
V) Si lavas toda la ropa entonces no cocinas

A) I o II B) I o IV C) Solo IV D) Solo III E) V

SOLUCIÓN:

p : cocinas
q : lavas toda la ropa

Formalizando:

Morgan

$$(p \vee q) \rightarrow \sim(\sim p \wedge q)$$

$$(p \vee q) \rightarrow (p \vee \sim q)$$

Condicional

$$\sim(p \vee q) \vee (p \vee \sim q)$$

Morgan

Conmutativa

$$(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \vee \sim q)$$

$$(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q \vee p$$

Absorción

$$\sim q \vee p$$

$$\equiv p \vee \sim q$$

Cocinas o no lavas toda la ropa

CLAVE D

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

PROBLEMA 4

Si Alberto dice: No viajé por año nuevo porque no tuve dinero, y se sabe que lo que dijo es falso, entonces señale las proposiciones correctas:

I. Alberto no tuvo dinero y viajó por año nuevo.
II. Es mentira que si Alberto viajó, entonces tuvo dinero.
III. Alberto no tuvo dinero y no viajó por año nuevo.

A) I y II B) solo III C) I, II y III D) solo II E) Solo I

Ley de la Condicional

- $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

Negación de la Condicional

- $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

SOLUCIÓN:

Formalizando

No viajé por año nuevo porque no tuve dinero

$\sim p \leftarrow \sim q$ } Es falsa

Se deduce: $\sim (\sim q \rightarrow \sim p)$

Neg. Condicional

$\sim q \wedge p$

Alberto no tuvo dinero y viajó por año nuevo (I)

Se deduce: $\sim (\sim q \rightarrow \sim p)$

Neg. Condicional

$\sim (p \rightarrow q)$

Es mentira que si Alberto viajó, entonces tuvo dinero (II)

De los enunciados, son correctas I y II CLAVE A

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

PROBLEMA 5

La siguiente proposición: "Si mañana hace calor entonces me pondré ropa ligera, y mañana no me pongo ropa ligera ya que hará calor", es equivalente a:

A) "Mañana me pondré ropa ligera".

B) "Mañana no hará calor".

C) "Mañana no hará calor y me pondré ropa ligera".

D) "Mañana hará calor y me pondré ropa ligera".

E) "Mañana no hará calor y no me pondré ropa ligera".

SOLUCIÓN:

Simbolizando la proposición

p : mañana hace calor
q : me pondré ropa ligera

p	q	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$(p$	$\rightarrow$	$\sim q)$
V	V	V	V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	F	F	V	F	V	F	V	V

Matriz principal

Equivalente

$\sim p$

Mañana no hará calor

CLAVE B

INFERENCIAS NOTABLES

La inferencia es el proceso por el cual se derivan conclusiones a partir de premisas. Cuando una proposición se sigue de otras de ese modo, se dice que éstas implican aquella. La inferencia es el objeto de estudio tradicional de la lógica

Las inferencias lógicas más importantes son:

Modus Ponendo Ponens (MPP)

Si se afirma el antecedente de una premisa condicional, se concluye la afirmación del consecuente de dicha premisa

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{A \qquad\qquad} \\ \therefore B \end{array} \qquad \text{Ley: } [(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

Ejemplo

P1 : Si llueve en la noche, las pistas están mojadas
P2 : Llueve en la noche

C : Las pistas están mojadas

Modus Tollendo Tollens (MTT)

Si se niega el consecuente de una premisa condicional, se concluye la negación del antecedente de dicha premisa.

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ \underline{\sim B \qquad\qquad} \\ \therefore \sim A \end{array} \qquad \text{Ley: } [(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$

Ejemplo

P1: Si eres estudiante de Pitágoras, te están preparando muy bien
P2: No te están preparando muy bien

C : No eres estudiante de Pitágoras

Silogismo Disyuntivo (SD)

Si se niega uno de los elementos de una premisa disyuntiva, se concluye la afirmación del otro elemento.

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ \underline{\sim A \qquad\qquad} \\ \therefore B \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \vee B \\ \underline{\sim B \qquad\qquad} \\ \therefore A \end{array} \qquad \text{Ley: } \begin{array}{l} [(p \vee q) \wedge \sim p] \rightarrow q \\ [(p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow p \end{array}$$

INFERENCIAS NOTABLES

Ejemplo:

P1: Estudio Contabilidad o Economía
P2: No estudio Economía

C : Estudio Contabilidad

Silogismo Hipotético Puro

Si de un conjunto de dos premisas condicionales, el consecuente de una de las premisas es la afirmación del antecedente de la otra premisa, entonces del antecedente de una de las premisas se deriva el consecuente de la otra premisa.

$$\begin{array}{l} A \to B \\ B \to C \\ \hline \therefore A \to C \end{array} \qquad \begin{array}{l} B \to C \\ A \to B \\ \hline \therefore A \to C \end{array}$$

Ley:

$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

$[(q \to r) \wedge (p \to q)] \to (p \to r)$

Ejemplo:

P1: Si dos rectas son perpendiculares, entonces se intersecan
P2: Si dos rectas se intersecan, entonces no son paralelas

C : Si dos rectas son perpendiculares, entonces no son paralelas

Conjunción

De un conjunto de premisas, se puede concluir la conjunción de las mismas.

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline \therefore A \wedge B \end{array}$$

Ley:

$(p) \wedge (q) \to p \wedge q$

Ejemplo:

P1: Juan es escritor
P2: Juan es poeta

C : Juan es escritor y poeta

Simplificación

De una premisa conjuntiva se puede concluir cualquiera de sus componentes

$$\begin{array}{l} A \wedge B \\ \hline \therefore B \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \wedge B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

Ley:

$(p \wedge q) \to q$

$(p \wedge q) \to p$

Ejemplo:

P1: José es doctor y abogado

C : José es doctor

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

EJEMPLO APLICATIVO

Si no obtengo la beca, no viajaré. Si no viajo, no seré un profesional. Entonces llego a la conclusión que:

A) Es falso que obtenga la beca o sea profesional.
B) No es cierto que no obtenga la beca y no viaje.
C) No es cierto que obtenga la beca o no sea profesional.
D) Obtengo la beca o no seré un profesional
E) Obtengo beca y no viajo.

SOLUCIÓN:

Formalizando las premisas

p : obtengo la beca
q: viajaré
r: seré profesional

Silogismo Hipotético Puro

P1: $\sim p \rightarrow \sim q$ — Si no obtengo la beca, no viajaré

P2: $\sim q \rightarrow \sim r$ — Si no viajo, no seré un profesional

C : $\sim p \rightarrow \sim r$ — Si no obtengo la beca, no seré un profesional

Condicional

C : $p \vee \sim r$

Obtengo la beca o no seré un profesional

CLAVE D

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

PROBLEMA 6

Cuando te titules, serás profesional. Además si trabajas, ganarás dinero. Pero es falso que seas profesional y ganes dinero, por lo tanto:

A) Cuando te titules, trabajarás.
B) Si no te titulas, no ganas dinero.
C) Si te titulas, no trabajarás.
D) Si no eres profesional, no ganarás dinero.
E) Si no te titulas, ganarás mucho dinero

SOLUCIÓN:

Formalizando las premisas

P1: Cuando te titules, serás profesional

P2: Si trabajas, ganarás dinero

P3: Es falso que seas profesional y ganes dinero

p : cuando te titules
q: serás profesional
r: trabajas
s: ganas dinero

$$P1: p \rightarrow q$$

$$P2: r \rightarrow s \equiv \sim s \rightarrow \sim r$$

$$P3: \sim(q \wedge s) \equiv \sim q \vee \sim s \equiv q \rightarrow \sim s$$

Silogismo Hipotético Puro

$$P1: p \rightarrow q$$

$$P3: q \rightarrow \sim s$$

$$P2: \sim s \rightarrow \sim r$$

$$C: p \rightarrow \sim r$$

Cuando te titules, no trabajarás

CLAVE C

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

PROBLEMA 7

Si Carolina regresa a Moscú, Jorge será feliz. El avión llegará al amanecer si no hay niebla en la ciudad. Pero, si hay niebla en la ciudad entonces Carolina no regresaba de Moscú. Si sabemos que Carolina regresa de Moscú, se deduce:

I. Jorge será feliz.
II. El avión llegará al amanecer.
III. No hay niebla en la ciudad.

A) Sólo I.
B) III y II.
C) I y II.
D) I y III.
E) Todas.

SOLUCIÓN: Formalizando las premisas

P1: $p \rightarrow q$
P2: $\sim s \rightarrow r$
P3: $s \rightarrow \sim p$
P4: p

p: Carolina regresa a Moscú
q: Jorge será feliz
r: el avión llega al amanecer
s : hay niebla en la ciudad

Modus Ponendo Ponens (MPP)

P1: $p \rightarrow q$
P4: p

C1: q

Jorge será feliz (I)

Modus Tollendo Tollens (MTT)

P3: $s \rightarrow \sim p$
P4: p

C2: $\sim s$

No hay niebla en la ciudad (III)

Modus Ponendo Ponens (MPP)

P2: $\sim s \rightarrow r$
C2: $\sim s$

C3: r

El avió llegará al amanecer (II)

✓ Todas son correctas

CLAVE E

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

PROBLEMA 8

"Si terminas la tarea, irás a la fiesta. No aprobarás el examen si dejas de lado tus obligaciones. También tenemos que si vas a la fiesta, dejas de lados tus obligaciones, lo cierto es que terminas la tarea".

Concluimos que:

A) No vas a la fiesta.
B) Dejas de lado tus obligaciones.
C) No apruebas el examen.
D) No estudias.
E) Apruebas el examen.

SOLUCIÓN:

Formalizando las premisas

P1: $p \rightarrow q$
P2: $s \rightarrow \sim r$
P3: $q \rightarrow s$
P4: p

p : terminas la tarea
q: irás a la fiesta
r: aprobarás el examen
s: dejar de lado las obligaciones

Modus Ponendo Ponens (MPP)

P1: $p \rightarrow q$
P4: p
C1: q

Silogismo Hipotético Puro

P2: $\cancel{s \rightarrow \sim r}$
P3: $\cancel{q \rightarrow s}$
C2: $q \rightarrow \sim r$

Modus Ponendo Ponens (MPP)

C2: $q \rightarrow \sim r$
C1: q
C : $\sim r$

No apruebas el examen

CLAVE C

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

PROBLEMA 9

María no me quiere o no me odia. María me odia. Además si no es rencorosa, María me quiere. Sin embargo, si es rencorosa entonces es temperamental.
Se puede inferir:

A. No es rencorosa.
B. No es temperamental.
C. Es temperamental.
D. Me odia.
E. Me ama

SOLUCIÓN:

Formalizando las premisas

P1: María no me quiere o no me odia

P2: María me odia

P3: Si no es rencorosa, María me quiere

P4: Si es rencorosa entonces es temperamental

p : María me quiere
q: María me odia
r: es rencorosa
s: es temperamental

	Silogismo Disyuntivo (SD)	Modus Tollendo Tollens (MTT)	Modus Ponendo Ponens (MPP)
P1: $\sim p \vee \sim q$	$\sim p$		
P2: q			
P3: $\sim r \rightarrow p$		r	
P4: $r \rightarrow s$			s

María es temperamental

CLAVE C

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

PROBLEMA 10

Es falso que las clases se suspendan o la universidad cierra, si se inician las vacaciones. Nos han comunicado falsamente que ni las clases se suspenden ni la universidad cierra. Luego:

A) Se inician las vacaciones

B) No se inician las vacaciones

C) Se suspenden siempre las clases

D) La universidad cierra

E) Más de una es correcta

SOLUCIÓN:

Formalizando las premisas

p: las clases se suspenden

q: la universidad cierra

r: se inician las vacaciones

P1: $[r \rightarrow \sim(p \vee q)]$

P2: $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

$[r \rightarrow \sim(p \vee q)] \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q)$ Morgan

$[r \rightarrow \sim(p \vee q)] \wedge (p \vee q)$

Condicional

$[\sim r \vee \sim(p \vee q)] \wedge (p \vee q)$

Absorción

$(p \vee q) \wedge \sim r$

Se infiere por:

Simplificación

$\sim r$

No se inician las vacaciones

CLAVE B

CLAVES : EQUIVALENCIAS E IMPLICANCIAS

Ejercicios en clase		Ejercicios para el alumno	
1 D	6 C	1 D	6 A
2 A	7 E	2 D	7 D
3 D	8 C	3 D	8 C
4 A	9 C	4 A	9 C
5 B	10 B	5 B	10 C